EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 8
april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Heile - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *ƒ* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *ƒ* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Differentiatie in het Onderwijs

(terrein-verkenning)

Drs. H. G. B. BROEKMAN
Soest

Het volgende artikel is op stencil aangeboden aan de studenten die het college didactiek van de wiskunde volgen aan de R.U. te Utrecht. Dit stencil diende als uitgangspunt voor een college en een werkgroep-bijeenkomst. Behalve van de in §5 aanbevolen literatuur is bij de samenstelling dankbaar gebruik gemaakt van het materiaal dat verstrekt werd aan de deelnemers van de conferentie over Differentiatie (schooljaar '69-70), verzorgd door het Onderwijskundig Studiecentrum. Verder is gebruik gemaakt van de scriptie van R.J.M. Willemse te Gorinchem (o.a. §3 is geheel daaruit overgenomen).

1 Algemene inleiding

Definitie (beschrijvend): differentiatie is de situatie waarin, of zijn de maatregelen waardoor, er een verschil is tussen leerlingen of groepen van leerlingen van dezelfde jaargang in wat zij op hun school doen.

Differentiatie kan ontstaan (ontstaan zijn) door verschillende
1 globale doelen,
2 specifieke doelen,
3 leerstofgebieden (inhouden),
4 strategieën,
5 werkmethoden,
6 hulpmiddelen,
of combinaties hiervan.

Op dit moment gaat men bij het indelen van differentiatie naar aspecten meestal van een andere indeling uit (de punten b–e vallen onder 5 en a onder 3)
a de inhoud (het programma, de stof)
b de groepering van de leerlingen
c de werkvormen
d de sturing van het leerproces
e het tempo waarin gewerkt wordt

(Het zou zinvol en m.i. zelfs gewenst zijn, dat eens nauwkeurig nagegaan werd wat de overeenkomsten en de verschillen zijn van ieder van de hierdoor ontstane differentiatie-modellen, juist t.a.v. de punten 1-6).

ad a De "stof" kan verschillen door *alternatieve vakken* (bijv. handelswetenschappen i.p.v. wiskunde II in het eindexamenpakket), of door *alternatieve stof binnen een vak*. In het laatste geval kan de differentiatie gericht zijn op de *inhoud* (bijv. keuze-onderwerpen voor wiskunde II), de *moeilijkheidsgraad* (bijv. MAVO/HAVO met een parallel-lopend HAVO-VWO-boek; IMU-materiaal in Zweden), of *aspect* (bijv. herhalingsstof voor speciale onderdelen van de wiskunde; bij talen voor uitspraak, vocabulaire, strukturen, etc.)

ad b Bedoeld is de groepering voorzover deze in het rooster tot uitdrukking komt.
Men kan groeperen:
1 naar schooltype (categoriaal, d.w.z. gymnasium-atheneum, etc.),
2 naar afdeling binnen een school (streaming),
3 naar 'niveau' per vak, binnen een afdeling (setting),
4 bewust *niet* naar 'niveau' (veronderstelde kwaliteiten), d.w.z. heterogeen,
5 naar didactische verlangens (Trump-systeem: instructie in grote groepen, verwerking in kleine groepjes en individueel)
6 verder nog i.v.m. klassesplitsingsnormen (parallelklassen, halve klassen in studieuren), naar sekse (handenarbeid versus handwerken).

ad c Werkinstructie, doceerles, leergesprek, klassegesprek, groepswerk, individuele werkzaamheid, projectwerk, enz.

ad d Wie stuurt?
1 de stof (geprogrammeerde instructie, computer assisted instruction)
2 de leraar
3 de leerling (gedeeltelijk bij Montessori-onderwijs)

ad e Bij uitstek in scholen met een 'vrije tempo werkwijze', zoals bijv. het Roncalli-College te Bergen op Zoom.

Opmerking: In de praktijk komen allerlei combinaties voor.

2 Enige vormen van differentiatie

1 *Streaming*

De leerlingen worden in een bepaalde groep geplaatst, op grond van een verondersteld niveau van de individuele leerling dat voor alle vakken gelijk is. In deze 'homogene' groepen moeten alle leerlingen in hetzelfde tempo dezelfde leerstof doorwerken en is hooguit differentiatie in de werkvormen mogelijk. De doorstroming naar een 'hogere' vorm van onderwijs komt vrijwel alleen verticaal (na een behaald einddiploma) voor en gaat gepaard met verlies van

een jaar. In de praktijk komt horizontale doorstroming naar een hogere vorm van onderwijs nauwelijks voor (wel naar een lagere onderwijsvorm). De leerling wordt vaak op het gestelde niveau 'vastgeprikt' door opneming in de homogene groep, waarin hij geplaatst is.

2 *Setting*

De leerlingen worden in 'heterogene' klassen geplaatst, maar gezien de moeilijkheden bij enkele (zware?) vakken worden de leerlingen voor deze vakken in homogene (niveau) groepen verdeeld. Voorbeeld: twee parallelklassen hebben tegelijkertijd wiskunde en de leerlingen worden voor deze lessen in min of meer permanente en homogene groepen ingedeeld.
Setting kan worden gezien als een minder stringente variant van de kategoriale indeling.

Als voordelen kunnen gelden:
- dat hierbij niet hoeft te worden verondersteld dat een leerling hetzelfde niveau van aanleg zou hebben voor alle vakken;
- dat deze vorm van differentiatie meestal slechts een beperkt aantal vakken omvat, hetgeen het probleem van de doorstroming voor een deel oplost.

Als nadeel kan gelden:
- dat evenals bij een volledig kategoriale indeling het risico bestaat dat de indeling in 'niveau' groepen zichzelf bestendigt, omdat de leerlingen door het werkmilieu en de daarin aan hen gestelde verwachtingen worden beïnvloed.

3 *Vrije tempo werkwijze*

Volgens deze werkwijze, ontwikkeld aan het Roncalli-College te Bergen op Zoom, komt de differentiatie tot stand naar aanleiding van de *verschillende tempi* waarin leerlingen (kontinu) vorderen door een programma van vóor ieder *gelijke stof.*
Uitgangspunt van deze werkwijze is dat alle leerlingen in staat zijn, zij het in verschillend tempo, dezelfde leerstof te verwerken. Konsekwentie is dat een sterke individualisatie wordt geaccepteerd en dat, in ieder geval organisatorisch, de vaste eigen groep ontbreekt.
(Verdere gegevens worden vermeld in § 3)

4 *Differentiatie binnen klasseverband*

In vaste 'heterogene' groepen moet elke individuele leerling tot zijn recht kunnen komen, door differentiatie in de leerstof en de werkvormen. Men wil hierdoor bereiken dat de tempoverschillen in een groep leerlingen zover beperkt blijven dat deze leerlingen na verwerking van een leerstofeenheid weer 'gelijk van

start gaan' voor een volgende leerstofeenheid. Hierdoor kan het groepsverband waarin deze leerlingen werken worden bewaard, zonder dat steeds op het gemiddelde wordt gemikt en aan de verschillende behoeften van elke leerling - als individu – geen recht wordt gedaan.

Als voordelen van het bewaren van een heterogeen groepsverband mogen gelden:

- dat leerlingen, vooral aan het begin van het voortgezet onderwijs, behoefte hebben aan een stabiele groep, waarin ze zich thuis kunnen voelen;
- dat een dergelijke groep een reflectie biedt van de pluriforme maatschappij waarin de leerlingen leven;
- dat er een mogelijkheid is van onderlinge steun en 'optrek';
- dat de determinatie kan worden uitgesteld.

5 *Het I.M.U.-project (wiskundeproject)*

In heterogene groepen wordt gedifferentieerd naar de leerstof en het tempo, waarbij de leerling individueel werkt.
Van een leerstofeenheid (ongeveer 1 trimester) werkt elke leerling de eerste component door, na een diagnostische proef heeft de leerling de keuze uit 3 verschillende versies van de volgende component en na weer een diagnostische toets weer de keuze uit 3 verschillende versies van de derde component. De leerstofeenheid wordt besloten met een diagnostische en een prognostische proef.
Het I.M.U.-project voor de wiskunde wordt in Zweden ontwikkeld en op grote schaal toegepast.
Nadere gegevens worden vermeld in § 3.

6 *Team-teaching*

In de post-mammoetfase mogen we het volgende beeld verwachten: Een groep van 300 leerlingen krijgt het onderwijs via

a Large group-instruction: 20 % van de lesperioden in 2 groepen van ieder 150 leerlingen en 2 docenten.

b Small group-instruction: 40 % van de lesperioden in 20 kleine groepen van 15 leerlingen en 1 docent.

c Independent study: 40 % van de tijd in 3 groepen van 100 leerlingen en 1 docent.

(De lerarenbezetting komt overeen met onze huidige lerarenbezetting. Het benoemen van assistent-docenten geeft evt. nog meer begeleiding). Team-teaching kan alle vormen van differentiatie omvatten en wordt in de U.S.A. reeds incidenteel toegepast.

Samenvattend:

Streaming-setting: vast menu en vast tempo per groep.
Tempo-differentiatie: allemaal hetzelfde menu, verschil in tempo.
Differentiatie binnen klasseverband: vaste groep, vast tempo, wisselende menu's.
I.M.U.: verschil in tempo en wisselende menu's.

3 Verdere uitwerking van § 2 nr. 3, 4, 5

III De vrije tempo werkwijze van het Roncalli College

Als een leerling zijn eigen tempo van werken mag bepalen dan is te verwachten dat de werkelijke capaciteiten, de te verwachten intellectuele prestaties en de persoonlijkheid van deze leerling in hoge mate tot uiting komen.
Vanuit deze basisgedachte is op het Roncalli College een systeem ontwikkeld, dat als kenmerken heeft:

1 Een verdeling van de jaarleerstof in leerstof-eenheden per maand; ieder omvattend 3 taken en 1 controletaak per vak, die door de leerlingen individueel gemaakt kunnen worden, met daarnaast de vastgestelde instructiestof die nodig is om de taken te kunnen maken.

2 Een verkorting van de lestijd tot 50 % van het lesuur; in deze instructietijd moeten korte instructies gegeven worden aan groepen van leerlingen op verschillend niveau en kan de overblijvende tijd besteed worden aan werkzaamheden van 3.

3 De zelfwerkzaamheid in de tweede helft van het lesuur en de interacties tussen leerlingen en leraren; de tijd is beschikbaar voor het werken aan de taken, het controleren en aftekenen van voltooide opdrachten en ook voor individuele instructie.
Bij het begin van deze tweede helft van het lesuur mag de leerling zich vrij begeven naar de docent die hij nodig heeft om verder te kunnen werken.

4 Een regelmatige controle van het gemaakte werk, de administratieve verwerking en berichtgeving daarvan aan de ouders; elke leerling heeft een takenkaart waarop de voltooide taken door de leraar worden aangegeven met een paraaf en de controletaak (proefwerk) bovendien door een waarderingscijfer en de datum. Als de leerling voor elk vak (evt. na een herhalingsopdracht) een cijfer gekregen heeft, wordt de kaart ondertekend door de ouders en ingeleverd bij de klasseleraar. Deze overhandigt aan de leerling een nieuwe takenkaart en een nieuw takenblad met alle opdrachten voor de volgende periode en verwerkt de verkregen gegevens over het werktempo en de kwaliteit van de leerling. Daarna gaan de taakkaarten naar de conrector die de kaarten admini-

streert op het leerlingenoverzicht. De ouders krijgen op gezette tijden een overzicht toegezonden, waaruit tempo en kwaliteit blijken.

5 Samenwerking van de docenten bij de controle en bespreking van de resultaten en een grote samenwerking binnen de vaksecties. Daarnaast moeten de docenten zeer flexibel kunnen optreden om leerlingen van verschillend vorderingenniveau kort na elkaar te beoordelen en te instrueren en daarnaast een goede werksfeer te handhaven. De docenten moeten 'zeker in het begin' bereid zijn een grote hoeveelheid extra werk te verzetten.

Resultaten

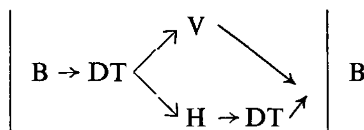
De leerlingen, met hun vaak onbekende capaciteiten, starten in de eerste klas met hetzelfde werk en al heel spoedig tekent zich een differentiatie in de vorderringen af.
Vanaf dat moment wordt zo nodig instructie per niveau gegeven en vindt hergroepering plaats. De leerling gaat groepsgewijs of zelfs individueel voort in de stof. Aan het eind van het eerste jaar is de verdere schoolloopbaan reeds duidelijk te voorspellen, maar de selectie kan uitgesteld worden, want in het tweede jaar kan de leerling verder gaan op het punt waar hij gebleven was.
Behoudens extreme gevallen zal pas na het derde leerjaar gedetermineerd worden naar de vorderingen van de leerlingen, en pas in het vierde jaar is er een splitsing in de categoriale afdelingen. Een lange selectievrije periode, zonder doubleren, is daarmee bereikt en in de praktijk toegepast.
De ervaring met de hogere klassen is minder groot en alleen op de M.M.S. opgedaan. De neiging om dieper op de stof in te gaan wordt dan groter, de inhoud van het vak wordt duidelijker en toch snel doorwerken schijnt nadelig te werken op de motivatie. Evenwel het examen zet docent en leerling dan onder druk. Wellicht dat de pakketkeuze in de nieuwe schooltypen hier een gunstige wending kan betekenen. Duidelijk merkbaar op de school is de veranderde sfeer: een geest van positief willen, persoonlijke inzet, ontspannen houding en onafgedwongen activiteit manifesteert zich dagelijks.

Wiskunde in de onderbouw. De havo-delen van de serie Moderne Wiskunde zijn gesplitst in leerstofeenheden van 3 hoofdstukken, waarbij bewerkte uitkomstenboekjes gemaakt zijn en 10 controletaken. De betere leerlingen gaan na voltooiing van de havo-delen over op de vwo-delen. Er is nauwelijks kerninstructie, in de door regelmatige hergroepering betrekkelijk homogene groepen worden alleen de gerezen problemen meestal klassikaal besproken. Zeer arbeidsintensief zijn de werktijden en de voorbereidingen, maar ook bevredigend.

IV Differentiatie binnen klasseverband aan de R.S.G. te Schagen

In een heterogene groep leerlingen moeten differentiatie en socialisatie verenigd worden, zodat elke individuele leerling tot zijn recht kan komen. De differen-

tiatie komt tot uiting in verschillen in de leerstof, waardoor de tempoverschillen worden genivelleerd.
Als grondpatroon is daartoe gekozen:



Voor elke leerstofeenheid per vak moet de basis- of kernstof B door iedere leerling beheerst worden. Na een diagnostische toets DT, die dient om de leerling te informeren of hij de kernstof beheerst, kan de leerling zelfstandig kiezen tussen verrijkingsstof V en herhalingsstof H met nog een diagnostische toets. De DT moet direct aansluiten bij de basisstof, zich bepalen tot de minimumeisen en toch een moeilijkheidsgraad hebben zodat de beantwoording aan hoge eisen voldoet.
De V-stof mag niet vooruitlopen op latere kernstof, maar moet verschillen in moeilijkheidsgraad en aspecten van de behandelde kernstof.
De leerlingen werken in kleine groepjes of individueel; een grote flexibiliteit is gewenst, zowel in de groepsvorming als in de individuele diepgang.
Het experiment is in 1969 gestart op een zeer beperkte schaal voor de vakken Nederlands, Engels, Frans en wiskunde. In 1970 wordt het experiment voor dezelfde vakken voortgezet en uitgebreid.

De sectie wiskunde:

Het grondpatroon is omgewerkt tot het volgende werkmodel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D H K	B	D H K	B	D H K	B	D H K	D H K	H K	H K	E

De jaarleerstof wordt verdeeld in ca. 11 leerstofeenheden voor 3 weken. De basisleerstof B wordt verdeeld over de lessen 1, 3, 5 en 7 en hierop volgt de herhalingsstof H of de keuzestof K in de lessen 2, 4, 6 en 8. De korte diagnostische toets D wordt afgenomen aan het begin van deze H-K lessen over de basisstof van de vorige les. Aan het begin van les 9 volgt een D-toets over de hele leerstofeenheid en vervolgens in les 9, 10 en 11 H-K stof over die eenheid. Ongeveer een week later wordt een evaluatieve toets E afgenomen. Dit werkmodel is in het cursusjaar 1969-1970 voor twee leerstofeenheden uitgewerkt en beproefd. De leerstof bevatte beide keren 2 hoofdstukken uit het boek Moderne Wiskunde deel 1.
De confrontatie van docenten en leerlingen met het werkmodel in de praktijk en het uittesten van de leerstofplanning leverde op:

– Het werkmodel voldoet als enige flexibiliteit in het schema toegestaan wordt.
– Het vaststellen van criteria voor de bepaling van B, H, K en niet te behandelen stof uit het leerboek, alsmede voor de bepaling van de volgorde, vereist een grote deskundigheid en is tijdrovend.
– De hoeveelheid stof was te groot, de B-stof moest en de H, K-stof mocht thuis afgemaakt worden, hetgeen niet de bedoeling was. Er was te weinig tijd om de gemaakte opdrachten in de klas te controleren en te bespreken.
– Gewenst zou zijn als elk fout gemaakt item van een D-toets een verwijzing naar gerichte H-stof gaf.
– De leerlingen zijn weinig keuzebewust, maar vinden het werken in groepjes en vooral de zelfcontrole van de D-toetsen zeer geslaagd. Het nieuwe systeem is bij de leerlingen zeker welkom.
– Tijdens de tweede leerstofeenheid zijn vrijwel alle basislessen en de H, K-lessen in de 7 parallelklassen geobserveerd op de toegepaste didactische werkvormen en op de werkwijze van de leerlingen. Daarbij bleek o.a. in de B-lessen ca. 50 % van de tijd aan frontaal lesgeven en leergesprek besteed te zijn en ca. 22 % aan groepswerk. In de H, K-lessen waren de cijfers 11 en 61.
– Er is een duidelijke samenhang tussen de rapportcijfers in het oude systeem en de score op de E-toets.
In het cursusjaar 1970-1971 zal geprobeerd worden nog 2 leerstofeenheden voor de brugklas uit te werken en te beproeven, en bovendien 2 leerstofeenheden voor de tweede klas. Aan de werkvormen zal extra aandacht besteed worden.
Opmerking: In Berlijn is een soortgelijk leerstofdifferentiatieproject ontwikkeld: Niveaugroepen met periodieke verrijking voor de snellere leerlingen en een regelmatig gemeenschappelijk herbegin.

V Het I.M.U.-project in Zweden. (Individualiserad Matematik Undervisning)

1 Het onderwijs in Zweden:
In Zweden is de basisschool negenjarig en ook in de bovenbouw (klas 7, 8 en 9) zijn de klassen heterogeen samengesteld.
Vele wensen worden daarmee vervuld, zoals: lang selectievrij onderwijs waarin weinig invloed van milieufactoren, verbale achterstanden alsnog inhaalbaar, socialisering en geen self-fulfilling profecy. In de bovenbouw is wel enige leerstofdifferentiatie voor de verplichte vakken wiskunde en Engels, terwijl facultatief Duits en Frans op 2 niveaus gedaan kan worden.
Leerlingen en ouders bepalen de keuze en kunnen die keuze steeds herzien, de leraar adviseert. Studieresultaten worden nauwelijks vergeleken en dienen alleen om de leerling te tonen in hoeverre hij de stof beheerst. In het hele onderwijs zijn slechts 2 selectiedrempels: van de basisschool naar het gymnasium en van het gymnasium naar de universiteit.
In het onderwijs is sprake van een zeer grote individualisatie, men tracht de

leerlingen nu meer in groepsverband te laten werken teneinde de zeer zwakke leerlingen meer aandacht te kunnen geven.

2 Enige doelstellingen van het I.M.U. project (1964):

– Wiskunde lesmateriaal bedoeld voor zelfinstructie in klas 7, 8 en 9 ontwikkelen en testen.

– Aangepaste lesmethoden voor dit materiaal uitproberen.

– Maximaal effect van materiaal en methode onderzoeken door de groepering van de leerlingen en de inschakeling van de docenten aan te passen.

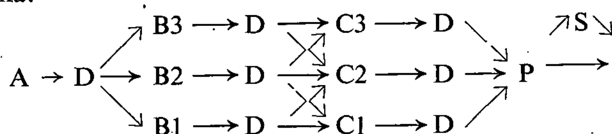
– Het effect meten van volkomen individueel onderwijs met het geconstrueerde materiaal.

Opmerking: Het hele project wordt door de staat gefinancierd.

3 Beschrijving van het materiaal en de methode:

De leerstof die vergelijkbaar is met de leerstof voor de onderbouw van de vwo-, havo- en mavoschool in Nederland, is verdeeld in 9 eenheden (modulen genaamd) elk bestemd voor 1/3 cursusjaar. Ieder moduul bestaat uit 6 tot 8 boekjes (van 50 tot 150 bladzijden) te weten A, B1, B2, B3, C1, C2, C3 en S en verder een serie diagnostische toetsen D, prognostische toetsen P, antwoordenboekjes en handleidingen.

Schema:



Iedere leerling werkt component A door, daarna volgt een D en dan kiest de leerling uit B1, B2 en B3 die dezelfde stof bevatten maar opklimmen in moeilijkheidsgraad. Na beëindiging volgt weer een D en een iets beperkter keuze voor de C-componenten. Na D en P volgt eventueel S dat speciale problemen bevat voor snelle en begaafde leerlingen.

De leerlingen werken de boekjes zelfstandig door en corrigeren de series opgaven zelf door het antwoordenboek te raadplegen. Als een leerling een component af heeft verzoekt hij om een toets, die dan zo snel mogelijk wordt afgenomen (meestal in kleine groepjes). De leraar heeft duidelijk een begeleidende taak.

4 De differentiatie:

Het is duidelijk dat iedere leerling op zijn eigen niveau en in zijn eigen tempo de wiskunde leert, waarbij het eigen niveau en tempo voortdurend mogen veranderen: volkomen individueel onderwijs in heterogeen groepsverband.

5 Opmerkingen en bevindingen:

– Het materiaal voor de 7e klas is reeds 4 jaar getest (ca. 20.000 ll.) en aan de hand van de ervaringen gereviseerd. De niveauverschillen zijn verhoogd,

een O-niveau is noodzakelijk. Het vervolgmateriaal is 3 resp. 2 jaar getest. Een evaluatieonderzoek wordt nu uitgevoerd.

– Van de leerlingen kiest ca. 40 % het hoogste niveau en 20 % het laagste. De tempoverschillen verraden duidelijk het karakter van de normale verdeling. Het totaal aan niveauveranderingen is minder dan 10 %.

– De D-toetsen zijn gebaseerd op minimumeisen en als niet alle voor het individu bestemde opgaven goed gemaakt zijn, worden na een bespreking aan die leerling aanvullende opdrachten verstrekt. De prestaties van de leerlingen voor de D-toetsen ontlopen elkaar niet veel. De P-toetsen bevatten ook moeilijker opgaven en vertonen dan ook een grote spreiding in de scores.

– Men experimenteert met een mengvorm van team-teaching en setting om de individualisatie iets te beperken, het systeem efficiënter te maken en de groepsflexibiliteit te vergroten.

– 75 % van de leerlingen en docenten is enthousiast over het systeem.

4 Enkele problemen bij leerstofdifferentiatie

Een van de hoofdvoorwaarden om te kunnen komen tot o.a. D. B. K. is het kunnen hanteren van diverse werkvormen door leraar en leerlingen. Een ander kernpunt is het hebben (samenstellen) van wisselende menu's.
Een eerste stap om tot wisselende menu's te komen is het nauwkeurig nagaan van wat in de gebruikte methode de zgn. kernstof (stof die door *alle* leerlingen verwerkt moet zijn) is, en wat de eventuele herhalingsstof en keuzestof.
Dit blijkt in de praktijk geen eenvoudige opgave, omdat geen van de op dit moment in de handel zijnde wiskundeschoolboeken hiervoor geschreven is.

1 de meeste boeken zijn geschreven voor bepaalde afdelingen ook al zijn soms keuzevraagstukken en keuzestof toegevoegd.

2 bij de schoolboeken met parallelseries is de overgang van het ene niveau naar het andere beslist geen eenvoudige zaak (al wordt dit soms wel gesuggereerd door de uitgevers).

Toelichting:

1 De gekozen strategie is lang niet altijd zo, dat de beoogde doelstellingen daarmee bereikt worden.

Kort voorbeeld: M.W. 1 hfdst. 3 § 11. Doelstelling:
a het kunnen benoemen van punten.
b het kunnen aanwijzen van punten als de coördinaten gegeven zijn.
Willen deze doelstellingen bereikt worden, dan betekent dit o.a. dat de strategie goed moet zijn. Vandaar dat opgave 7 m.i. geplaatst dient te worden vóór opgave 4 etc.

2 Opgaven die op een bepaald moment niet tot de kernstof horen, maar op een later tijdstip wel, worden vaak min of meer bekend verondersteld bij de later te behandelen (te bestuderen) kernstof. Vooral de keuzestof mag geen onderdeel vormen van de keten van kernstof-eenheden.

Verder moet een leerling, die een tijdje alleen kernstof en keuzestof 'gedaan' heeft, later rustig keuzestof kunnen doen zonder verplicht te zijn voorgaande delen van de keuzestof alsnog te moeten doorwerken. Wat dit punt betreft levert de methode A-Z enige problemen op, daar de C-deeltjes (uitbreiding van de in de A- en B-deeltjes behandelde stof, ten behoeve van havo- en/of vwo-leerlingen) een zekere volgorde van behandeling van de verschillende onderwerpen aanhouden en daarbij een eigen - meer wiskundige (volwassen) taal - ontwikkelen.

Uit het voorgaande is wel duidelijk dat er voor de verwezenlijking van leerstof-differentiatie nog veel problemen op te lossen zijn, maar desondanks is het voor de kwaliteit van *alle* lessen nuttig, zelfs nodig, dat de leraar van de te behandelen stof nagaat wat de kernstof en wat de keuze- en/of herhalingsstof is. Al is het alleen maar om te weten waar hij de nadruk op moet leggen en wat de inhoud van zijn repetities zijn moet.

5 Aanbevolen literatuur

1 Doornbos, K., Opstaan tegen het zittenblijven. Den Haag 1969.
2 Yates, Grouping in education
3 Rang-Schulz, Die differenzierte Gesamtschule (1969).
4 Goldberg-Passew-Justman, The effects of ability grouping (1969).
5 Glasser, W., Schools without failure. New York, 1969.
6 Svensson, Nils-Eric, Ability grouping and scholastic achievement, Report on a five-year follow-up study in Stockholm. Stockholm, 1962.
7 Perspectives in Comprehensive Education. Report of an International Conference. Onderwijskundig Studiecentrum, Amsterdam (1969).
8 Roncalli: Een werkwijze (Muusses, Purmerend).
9 Roncalli: Een dag in de praktijk (Muusses, Purmerend).
10 Roncalli: Conferentie 1969 (Muusses, Purmerend).
11 Interim-verslag (I en II) Projekt Schagen (A.P.S. A'dam).
12 Het I.M.U.-project. Verslag van een reis van J. Timmer (R.I.T.P. A'dam).

Functie en structuur van de meetkunde in de methode

Tijdens de bijeenkomst van gespreksleiders van de Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde te Amersfoort op 6 februari 1971 werd o.a. gediscussieerd in groepen over bovenstaand onderwerp. 'De methode' wijst op het boek waarmee de betreffende groep werkte ('Van a tot z' resp. 'Moderne Wiskunde').

Dr. P. M. van Hiele poneerde daarbij de volgende stellingen, die wij de lezers van Euclides gaarne voorleggen. Zonder commentaar. Maar commentaar van lezerszijde zien wij – redactie – gaarne tegemoet.

1 De kennis (zelfs een oppervlakkige kennis) van het deduktieve systeem van de meetkunde van Euclides behoort niet tot een gewenst programma voor mavo-leerlingen.

2 De vervanging van het deduktieve systeem van Euclides door een ander deduktief systeem van meetkundestellingen maakt de wenselijkheid niet groter.

3 Het is dus gewenst, dat op Mavo-examens niet naar zulke kennis wordt gevraagd.

4 Wèl is het gewenst, dat de leerlingen enkele hoofdkenmerken van een deduktief systeem leren kennen. In de meetkunde zijn daarvoor wel een aantal min of meer geschikte voorbeelden te vinden.

5 Tot de hoofdkenmerken zou men kunnen rekenen: het bestaan van axioma's, de onomkeerbaarheid van stellingen in het algemeen, de transitiviteit van de implicatie, verband tussen logika en verzamelingen.

6 De behandeling van stukken meetkunde die uitsluitend dienen om het deduktieve systeem te voltooien, kan dus achterwege blijven.

7 De kennis van figuren kan tot een minimum beperkt blijven: evenwijdigheid, loodrechte stand, berekeningen met behulp van de stelling van Pythagoras, de sinus- en de cosinusregel behoren tot de belangrijkste onderdelen.

8 De afbeeldingen in de meetkunde moeten meer gezien worden als voorbeelden van afbeeldingen dan als op zich zo belangrijke zaken.

9 De beheersing van de meetkunde, voor zover nodig, geschiedt hoofdzakelijk met behulp van algebra. Naar de veralgebraïsering dient zo snel mogelijk gestreefd te worden.

10 Middelen om het in 9 genoemde te verwezenlijken zijn: vroege invoering van coördinaten, invoering van vectoren, met als praktisch hulpmiddel: de rekenliniaal.

11 Richtsnoer voor de keuze van de te behandelen leerstof is niet alleen het mavo-eindexamen. Men moet ook nog rekening houden met de aansluiting van 4 mavo naar 4 havo.

Monoïden en groepen I

ROGER HOLVOET
Brussel

Het volgende artikel is een bewerking[1] van een artikel van Dr. R. Holvoet in het Belgische tijdschrift voor jongeren WISKUNDEPOST.

Groepen zijn niet te beschouwen als een recente ontdekking van de wetenschappen. Inderdaad, onder hen die zich daadwerkelijk met de groepen bezighielden, vermelden we Lagrange (1736–1813), Gauss (1777–1855), Cauchy (1789–1857), Abel (1802–1829), Hamilton (1805–1865), Galois (1811–1832). In de twintigste eeuw is de groepenleer onmisbaar zowel voor de wiskundige, als voor de wiskundegebruiker. Belangrijke toepassingen van de groepen heeft men bijvoorbeeld in de *kristallografie* (kristalgroepen), in de *kernfysica*, in de *quantische theorieën* (orthogonale groepen), in de *relativiteitsleer* (lorentzgroep), in de *handelswetenschappen* (homologiegroepen).
Onderwijl stellen zich in de groepentheorie zelf ontelbare problemen. Zo publiceerde R. Brauer (Harvard University) in 1963 een artikel met 43 *onopgeloste* problemen over de groepen. Sinds 1960 bewezen W. Feit (Yale University) en J. G. Thompson (University of Chicago) enkele vermoedens over enkelvoudige en oplosbare groepen, waarvan sommige in de 19e eeuw gesteld werden (één van de bewijzen beslaat eventjes 300 bladzijden!)

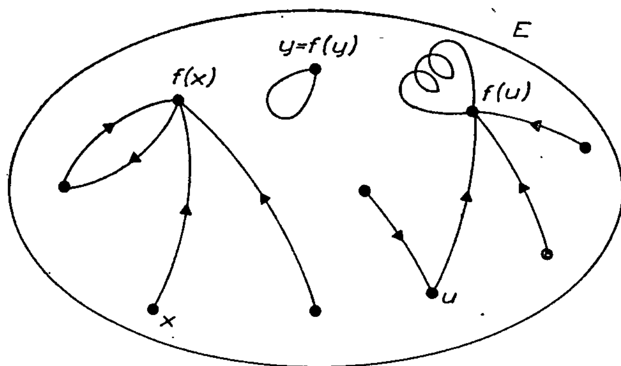
1 *Transformaties van een verzameling*

Zij E een verzameling. We noemen een *transformatie van E* elke afbeelding (of functie) van E in E.
Elke transformatie f van E is dus een verzameling koppels (of pijlen) zodanig dat

a de oorsprong en het uiteinde van elk koppel van f elementen zijn van E.
b elk element van E de oorsprong is van juist één koppel van f.

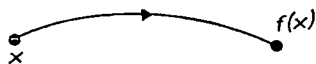
---

1 In het artikel is zo veel mogelijk de Belgische nomenclatuur gehandhaafd. Deze kan wel afwijken van de Nederlandse.



FIGUUR 1
Een transformatie van E

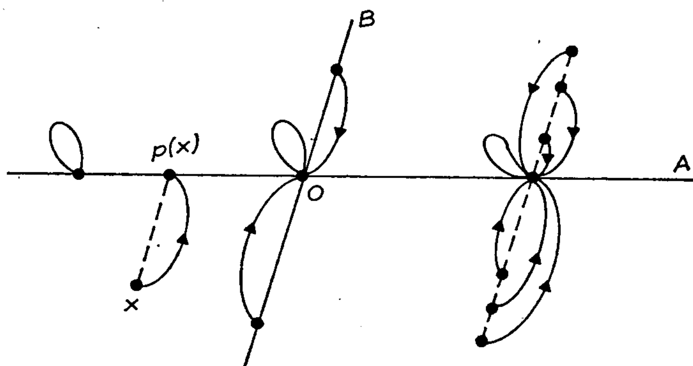
Het uiteinde $f(x)$ van het koppel van f met oorsprong x noemen we het *beeld van x door f* (voor alle $x \in E$).



FIGUUR 2

Voorbeelden

1 Zijn Π een vlak, A en B twee snijdende rechten omvat in Π. *De projectie p van Π op A, evenwijdig met B,* is een transformatie van Π.



FIGUUR 3

Inderdaad, uit elk element van Π vertrekt juist één pijl van p.

2 Zijn Π een vlak, A een rechte omvat in Π.
De spiegeling s van Π t.o.v. A is een transformatie van Π.

3 Een transformatie van **N**:

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}: x \mapsto x + 1$

4 Een transformatie van **R**:

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}: x \mapsto x^2$

5 Noem $\mathscr{D}X$ de verzameling van de deelverzamelingen van de verzameling X.

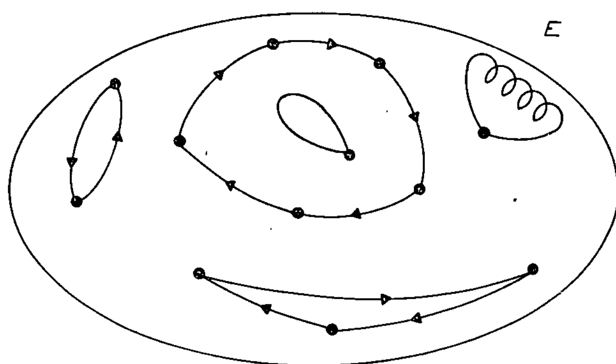
$t: \mathscr{D}X \to \mathscr{D}X: A \mapsto X \backslash A$

is een transformatie van $\mathscr{D}X$.
(Als A een deelverzameling van X is, dan is $t(A)$ dus het complement van A t.o.v. X).

2 *Permutaties van een verzameling*

Zij E een verzameling. We noemen *permutatie van E* elke bijectie van E op E. Elke permutatie p van E is dus een verzameling koppels (of pijlen) zodanig dat

a de oorsprong en het uiteinde van elk koppel van p elementen zijn van E.
b elk element van E de oorsprong is van juist één koppel van p.
c elk element van E het uiteinde is van juist één koppel van p.



FIGUUR 4
Een permutatie van E

Voorbeelden

1 Zijn Π een vlak, A een rechte omvat in Π.
De spiegeling van Π t.o.v. A is een permutatie van Π.

2 De transformatie van **N**:

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}: x \mapsto x + 1$

is *geen* permutatie van **N**.
Inderdaad, f bevat geen enkel koppel met uiteinde 0.

3 De transformatie van **Z**:

$$g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}: x \mapsto x + 1$$

is een permutatie van **Z**.

4 De transformatie van **R**

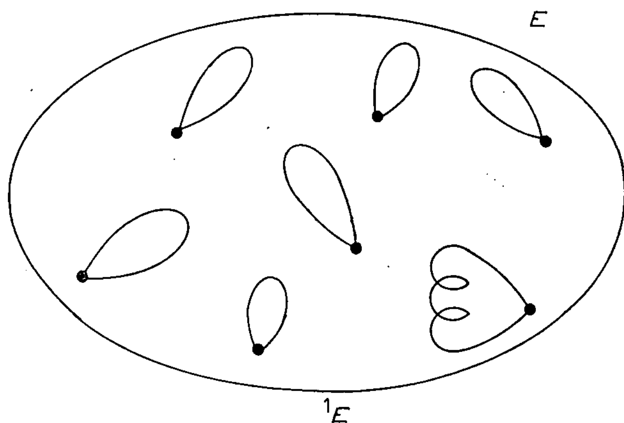
$$t: \mathbf{R} \to \mathbf{R}: x \mapsto x^2$$

is *geen* permutatie van **R**.
Inderdaad $t(-2) = t(2) = 4$.

5 Als E een verzameling is, dan is

$$1_E: E \to E: x \mapsto x$$

een permutatie van E, die we de *identieke permutatie van E* noemen.



FIGUUR 5
De identieke permutatie van E

3 *Monoïden*

Men noemt *monoïde* elke verzameling M uitgerust met een wet (of bewerking) $*$ waarvoor geldt

a $*$ *is intern, overal gedefinieerd in M*

$$x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$$

b $*$ *is associatief in M*

Voor alle $x, y, z \in M$: $(x * y) * z = x * (y * z)$
Men zegt dat de monoïde $M, *$ een *commutatieve monoïde* is dan en slechts dan, als voor alle $x, y \in M$: $x * y = y * x$.

Het kan gebeuren dat M een element e bevat zodanig dat voor alle

$$x \in M: x \ast e = x = e \ast x. \quad [1]$$

Men zegt dan dat e een *neutraal element voor de bewerking* $\ast$ is en dat $M, \ast$ een monoïde met neutraal element is.

Stelling 1. Elke monoïde bevat ten hoogste één neutraal element.

Ondersteldе:

$M, \ast$ is een monoïde
e is een neutraal element van M,
e' is een neutraal element van M,

Gestelde: $e = e'$

Bewijs: Aangezien e een neutraal element van $M, \ast$ is, heeft men volgens [1]:

$$e' \ast e = e' = e \ast e' \quad [2]$$

Aangezien e' een neutraal element van M, is, heeft men volgens [1]:

$$e \ast e' = e = e' \ast e \quad [3]$$

Uit [2] en [3] volgt onmiddellijk

$$e = e'$$

Wordt de bewerking van de monoïde met + aangegeven dan duidt men het neutraal element meestal met 0 aan. Wordt de bewerking aangegeven met $\cdot$ dan schrijft men voor het neutraal element in het algemeen 1.

Voorbeelden

1 $\mathbf{Z}, \cdot$ is een monoïde met neutraal element 1.
2 $\mathbf{N}, +$ is een monoïde met neutraal element 0.
3 De verzameling van de even gehele getallen met daarin de bewerking $\cdot$ is een monoïde die geen neutraal element bevat.
4 $\mathbf{Z}, -$ is geen monoïde.
5 Als X een verzameling is, dan is $\mathscr{P}X, \cap$ een monoïde met neutraal element X.
6 Als X een verzameling is, dan is $\mathscr{P}X, \cup$ een monoïde met neutraal element Φ.

4 *Symmetrische elementen*

Zij $M, \ast$ een monoïde met neutraal element e.

Men zegt dat $x' \in M$ een *symmetrisch element* van $x \in M$ is, dan en slechts dan als

$$x \ast x' = e = x' \ast x$$

Voorbeelden

1 In de monoïde $\mathbf{Z}, \cdot$ met neutraal element 1, zijn 1 en -1 de enige elementen die een symmetrisch element bezitten.

1 is het symmetrisch element van 1, want $1 \cdot 1 = 1$.

-1 is het symmetrisch element van -1, want $-1 \cdot -1 = 1$

2 In de monoïde $\mathbf{N}, +$ met neutraal element 0 is 0 het enige element waarvoor een symmetrisch element bestaat.

3 In de monoïde $\mathbf{Z}, +$ met neutraal element 0 heeft elk element een symmetrisch element.

Stelling 2. In een monoïde met neutraal element heeft elk element ten hoogste één symmetrisch element.

*Ondersteld*e:

$M, \ast$ is een monoïde met neutraal element e.
$x \in M$
$x' \in M$ is een symmetrisch element van x
$x'' \in M$ is een symmetrisch element van x

Gestelde: $x' = x''$

Bewijs:

$x' = x' \ast e$	(e is neutraal element)
$= x' \ast (x \ast x'')$	(x'' is symmetrisch element van x)
$= (x' \ast x) \ast x''$	($\ast$ is associatief)
$= e \ast x''$	(x' is symmetrisch element van x)
$= x''$	(e is neutraal element)

Opmerkingen:

1 In het bewijs van stelling 2 hebben we de associativiteit gebruikt, in het bewijs van stelling 1 niet.

2 Het symmetrisch element van een element x van een monoïde $M, +$ met neutraal element 0 wordt meestal $-x$ geschreven. $-x$ wordt het tegengestelde element van x genoemd.

3 Het symmetrisch element van een element x van een monoïde $M, \cdot$ met neutraal element 1 wordt meestal x^{-1} geschreven. x^{-1} wordt het omgekeerde van x genoemd.

4 Zij M, $*$ een monoïde met neutraal element. Als het symmetrisch element van $x \in M$ bestaat, zeggen we dat x *symmetriseerbaar is.*

5 *Groepen*

Men noemt groep elke monoïde $G,*$ met neutraal element zodanig dat elk element van G een symmetrisch element heeft.

Uit deze definitie volgt dat de groep G
a *juist één neutraal element bevat* (stelling 1)
b *bij elk element juist één symmetrisch element bevat* (stelling 2)

$G,*$ is een groep wil dus zeggen:
1 De wet $*$ is intern, overal gedefinieerd in G.
2 De wet $*$ is associatief in G.
3 G bevat een neutraal element e ten opzichte van $*$.
4 Voor elk element van G bestaat een symmetrisch element in G.

Voorbeelden

1 $\mathbf{Z},+$; $\mathbf{Q},+$; $\mathbf{R},+$; $\mathbf{Q}\backslash\{0\},\cdot$; $\mathbf{R}\backslash\{0\},\cdot$
zijn groepen.
2 $\mathbf{N},+$; $\mathbf{Q},\cdot$; $\mathbf{R},\cdot$ zijn geen groepen.

6 *Enkele oefeningen*

1 Zij E een willekeurige verzameling. In E definiëren we de wet $*$ door

$$*: E \times E \rightarrow E: (x, y) \mapsto x$$

Anders gezegd: voor alle $x, y \in E$: $x * y = x$
Bewijs dat $E,*$ een monoïde is.
2 Als de in opgave 1 gedefinieerde monoïde meer dan één element bevat, dan bevat deze monoïde geen neutraal element.
3 In de verzameling $\{e, x, y, z\}$ definiëren we een interne, overal bepaalde wet $*$ door het geven van de volgende tabel:

$*$	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	y	e	e
y	y	e	z	x
z	z	e	x	y

Waarom is $\{e, x, y, z\},*$ geen monoïde?

4 In N definiëren we de wet $\wedge$ als volgt

$\wedge : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}: (x, y) \mapsto$ de g.g.d. van x en y.

Bewijs dat N, $\wedge$ een commutatieve monoïde met neutraal element 0 is. Welke symmetriseerbare elementen heeft deze monoïde?

Naschrift (van de redactie)

In het artikel wordt de in België gangbare nomenclatuur gebruikt. Deze wijkt wel wat af van de Nederlandse. Ten gerieve van de lezers laten we hieronder de hier gebruikelijke synoniemen volgen:

koppel = *geordend paar.* De heer Holvoet wil een lans breken voor koppel; hij zou die term graag in het gehele Nederlandse taalgebied gebruikt zien. Bovendien vindt men meer en meer in Amerikaanse literatuur i.p.v. "*ordered pair*" de term "*couple*".

Rechte *omvat* in Π = rechte *gelegen* in Π

$\ast$ is *intern* = de verzameling is *gesloten* t.o.v. $\ast$

A.M.

analytische meetkunde
is een weemoedig vak:
elke parabool
een treurwilg
elke ellips
een gerooid rozenperk
elke hyperbool
het onbereikbare

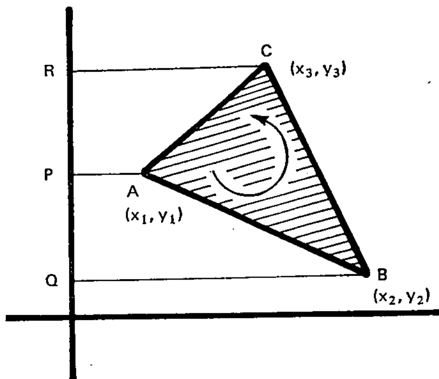
j. roelofsen

De ossehuidformule

Ir. H. M. MULDER

Aruba

Om een ossehuid te drogen, wordt deze opgespannen met spijkers langs de rand. De vorm die dan ontstaat is altijd tamelijk grillig. Zou het mogelijk zijn als de coördinaten van de spijkers gegeven zijn de oppervlakte van de veelhoek, door de spijkers gevormd, te bepalen?
We nemen nu eerst het eenvoudige geval van een driehoek en bepalen daar de oppervlakte. We zien in figuur 1: $ABC = QBCR - QBAP - PACR$



FIGUUR 1

$$ABC = \tfrac{1}{2}(x_3+x_2)(y_3-y_2)-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)(y_1-y_2)-\tfrac{1}{2}(x_3+x_1)(y_3-y_1)$$

ofwel

$$\tfrac{1}{2}[x_3y_3-x_3y_2+x_2y_3-x_2y_2-x_1y_1+x_1y_2-x_2y_1+ \\ +x_2y_2-x_3y_3+x_3y_1-x_1y_3+x_1y_1]$$

ofwel

$$\tfrac{1}{2}[-x_3y_2+x_2y_3+x_1y_2-x_2y_1+x_3y_1-x_1y_3]$$

ofwel

$$\tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

dus

$$ABC = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$$

Deze formule blijkt algemene geldigheid te hebben voor een willekeurige veelhoek (n-hoek). Hierbij gelden de volgende afspraken:

1. de hoekpunten dienen genummerd te worden achtereenvolgens 1, 2, 3, 4, . . ., n en wel tegen de wijzers van de klok. (Wordt de omgekeerde volgorde gekozen dan wordt de tegengestelde uitkomst gevonden.)
2. i stelt het plaatsnummer van een hoekpunt voor, $i+1$ het nummer van het één verder gelegen punt en $i-1$ van het één terug gelegen punt.

Als $i = 1$ moet men onder $i-1$ verstaan n, als $i = n$ moet men onder $i+1$ verstaan 1.

We bewijzen de algemeenheid van de formule, door aan te tonen: als de formule geldt voor een n-hoek, dan ook voor een $(n+1)$-hoek.
Als de formule dan geldt voor een 3-hoek dan dus ook voor elke volgende veelhoek.

Als een n-hoek één hoekpunt meer krijgt en overgaat in een $(n+1)$-hoek, dan wordt de oppervlakte vergroot of verkleind met die van een driehoek.
Als voor de oppervlakte van de n-hoek geldt:

$$\tfrac{1}{2}[\ldots x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+\ldots]$$

dan wordt de oppervlakte van de $(n+1)$-hoek gevonden door bij deze waarde de oppervlakte van de toegevoegde driehoek te tellen.
Deze driehoek heeft een oppervlakte:

$$\tfrac{1}{2}[x_n(y_{n+1}-y_1)+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_n-y_{n+1})]$$

De oppervlakte van de $(n+1)$-hoek wordt dan:

$$\tfrac{1}{2}[\ldots x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_ny_1-x_ny_{n-1}+x_1y_2-x_1y_n+x_ny_{n+1}-x_ny_1+ \\ x_{n+1}y_1-x_{n+1}y_n+x_1y_n-x_1y_{n+1}+x_2(y_3-y_1)+\ldots]$$

ofwel:

$$\tfrac{1}{2}[\ldots x_{n-1}(y_n-y_{n-2})+x_n(y_{n+1}-y_{n-1})+x_{n+1}(y_1-y_n)+x_1(y_2-y_{n+1})+ \\ +x_2(y_3-y_1)+\ldots]$$

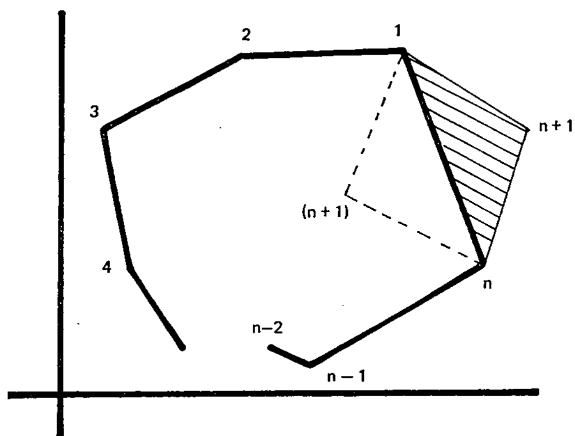
ofwel:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n+1} x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$$

Als het $(n+1)$de hoekpunt binnen de n-hoek valt zou de oppervlakte van de driehoek afgetrokken moeten worden (fig. 2). Maar dit zal toch dezelfde uitkomst geven.
Immers, doordat afgesproken is dat men linksom moet tellen, komen de hoekpunten in omgekeerde volgorde, zodat door een tegengestelde waarde af te trekken men dezelfde uitkomst verkrijgt *.

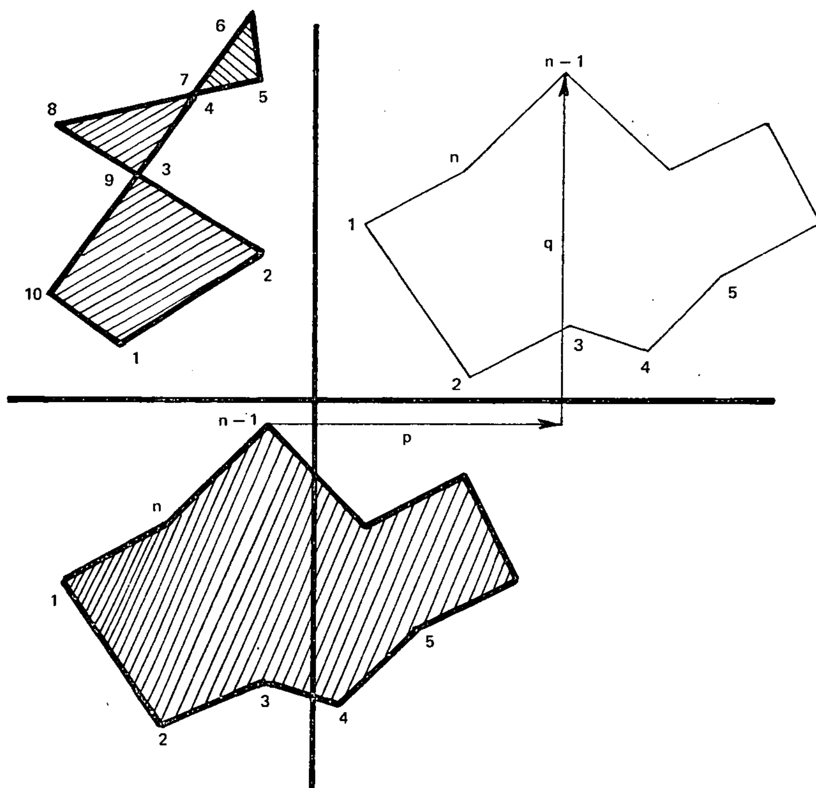
---

* Hiermede is ook aangetoond dat de formule ook geldt bij aanwezigheid van inspringende hoeken.



FIGUUR 2

Tenslotte kan nog twijfel rijzen omtrent de vraag of bij gebruik van ook negatieve coördinaten dezelfde formule geldt.
Om dit te bewijzen kan men een verschuiving van de veelhoek tot stand brengen *p* eenheden naar rechts *q* eenheden naar boven zodat de veelhoek geheel in het eerste kwadrant komt en alle coördinaten positief worden.



FIGUUR 3

De gegeven veelhoek heeft coördinaten x_i, y_i.
De verschoven veelhoek heeft coördinaten x_i+p, y_i+q.
De uitkomst $\frac{1}{2}\sum x_i(y_{i+1}-y_{i-1})$ gaat zodoende over in:

$$\tfrac{1}{2}\sum (x_i+p)(y_{i+1}+q-y_{i-1}-q) =$$

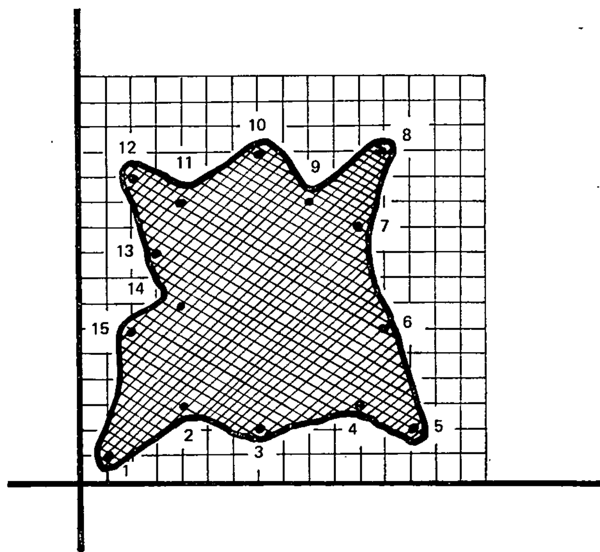
$$\tfrac{1}{2}\sum (x_i+p)(y_{i+1}-y_{i-1}) =$$

$$\tfrac{1}{2}\sum x_i(y_{i+1}-y_{i-1})+\tfrac{1}{2}p\sum (y_{i+1}-y_{i-1}) =$$

$$\tfrac{1}{2}\sum x_i(y_{i+1}-y_{i-1})+\tfrac{1}{2}p(y_2-y_n+y_3-y_1+y_4-y_2+y_5-y_3+y_6-y_4+ + \ldots +y_n-y_{n-2}+y_1-y_{n-1}) =$$

$$\tfrac{1}{2}\sum x_i(y_{i+1}-y_{i-1})+0$$

Bij een veelhoek waarbij zijden elkaar rechtstreeks (dus niet na verlenging) snijden, moet men deze snijpunten dubbel tellen als hoekpunt en daarbij consequent linksom blijven nummeren.
De veelhoek linksboven in figuur 3 moet derhalve als 10-hoek worden opgevat.



FIGUUR 4

In figuur 4 is een bepaalde huid getekend met de erbij behorende spijkertjes en hun coördinaten. De berekening is in een geordend schema weergegeven.
Hoekpunt 1 bevindt zich links onder, hoekpunt 2 rechts daarvan en zo verder.
Totaal heeft deze veelhoek 15 hoekpunten.
De som der produkten $x_i y_{i+1}$ wordt 826.
De som der produkten $x_i y_{i-1}$ wordt 654.
De huidoppervlakte wordt het halve verschil: 86.

$x_i y_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i-1}$
	(2)	(4)	
3	1	1	4
8	4	3	4
21	7	2	21
22	11	3	22
78	13	2	39
120	12	6	24
143	11	10	66
132	12	13	120
117	9	11	117
77	7	13	77
48	4	11	52
18	2	12	22
21	3	9	36
16	4	7	36
2	2	4	14
+	(1)	(1)	+
826			654

oppervlakte $\frac{826-654}{2} = 86.$

Twee vectorstellingen

DR. W. A. M. BURGERS

Wassenaar

Dat de 'cross'vermenigvuldiging distributief is t.o.v. de optelling wordt gewoonlijk bewezen m.b.v. een min of meer ingewikkelde figuur.
Het ligt voor de hand dit bewijs, door gebruik te maken van vectorstellingen, te vervangen door een ander. We willen in het kort de benodigde definities en stellingen opsommen.

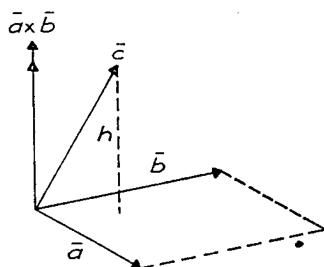
1 $\bar{a}\cdot\bar{b}$ het z.g. 'dot'-produkt of inwendig produkt is een scalair n.l. $||\bar{a}||\ ||\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b})$.

2 $\bar{a}\times\bar{b}$ het z.g. 'cross'-produkt of uitwendig produkt is een vector; $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{a}\times\bar{b}$ vormen in deze volgorde een positief georiënteerd stel; $\bar{a}\times\bar{b}$ staat loodrecht op het vlak $(\bar{a}, \bar{b})$; de grootte of modulus is $||\bar{a}||\ ||b||\sin(\bar{a}, \bar{b})$, waarbij de hoek van $\bar{a}$ naar $\bar{b}$ de kleinste is.

3 $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ en $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$.

4 Er zijn twee tripelprodukten: $\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c}$ en $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$.

Het eerste stelt de inhoud voor van een parallellepipedum voor, beschreven



FIGUUR 1

op de drie vectoren $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\bar{c}$, mits deze een positief georiënteerd stelsel vormen.
Hieruit volgt direct: $\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c}\times\bar{a} = \bar{c}\cdot\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{a}\cdot\bar{c}\times\bar{b} = -\bar{b}\cdot\bar{a}\times\bar{c} =$
$= -\bar{c}\cdot\bar{b}\times\bar{a}$.
Men schrijft dit produkt dikwijls eenvoudig als $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.
Aan te raden is

$\bar{c}$

$\bar{a}$ $\bar{b}$

Draait men in positieve zin, dan kan men de operatie-tekens $\cdot$ en $\times$ plaatsen vanuit elk begin. Draait men in negatieve zin, dan vindt men de tegengestelde uitkomst.

5 En nu de eerste stelling.

Te bewijzen: $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$.
Het is prettig om scalairen te vergelijken.
Daarom kiezen we een willekeurige vector $\bar{d}$ en vermenigvuldigen beide leden 'dot' met $\bar{d}$.

Het rechter lid wordt dan:

$$\bar{d}\cdot\{\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}\} = \bar{d}\cdot\bar{a}\times\bar{b}+\bar{d}\cdot\bar{a}\times\bar{c}.$$

Het linkerlid:

$$\bar{d}\cdot\{\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})\}.$$

We gebruiken nu de cyclische verwisseling (zie 4) om dit lid te herleiden.

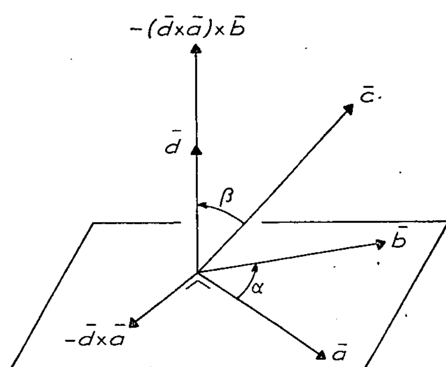
$$\begin{array}{ccc} & \bar{d} & \\ \bar{a} & & \bar{b}+\bar{c}\end{array}$$

$\bar{d}\cdot\{\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})\} = (\bar{b}+\bar{c})\cdot\bar{d}\times\bar{a} = \bar{b}\cdot\bar{d}\times\bar{a}+\bar{c}\cdot\bar{d}\times\bar{a} =$ (en nu nogmaals cyclisch verwisselen) $\bar{d}\cdot\bar{a}\times\bar{b}+\bar{d}\cdot\bar{a}\times\bar{c}$.

Noemen we $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})-\{\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}\}$ zolang $\bar{e}$, dan geldt dus:

$$\bar{d}\cdot\bar{e} = 0.$$

maar $\bar{d}\neq\bar{o}$, $\bar{d}\not\perp\bar{e}$ dus $\bar{e}=\bar{o}$, waarmee het gestelde is aangetoond.



FIGUUR 2

6 Nu het tweede tripelprodukt: $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$.
Het is duidelijk dat deze vector in het vlak $(\bar{b},\bar{c})$ ligt. zodat moet gelden:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \lambda\bar{b}+\mu\bar{c}.$$

Om λ en μ te bepalen gaan we weer over op scalairen, door beide leden 'dot' te vermenigvuldigen met $\bar{a}$. Aangezien $\bar{a} \perp \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ geldt: $\bar{a}\cdot\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$ zodat $0 = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})+\mu(\bar{a}\cdot\bar{c})$.
Hieruit volgt: $\lambda = \kappa(\bar{a}\cdot\bar{c})$ en $\mu = -\kappa(\bar{a}\cdot\bar{b})$ zodat:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \kappa\{\bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b})\}.$$

Rest aan te tonen, dat $\kappa = 1$.
Zij d een eenheidsvector, loodrecht op het vlak $(\bar{a}, \bar{b})$. We vermenigvuldigen beide leden 'dot' met $\bar{d}$.

Het rechterlid wordt:

$\kappa\{(\bar{b}\cdot\bar{d})\,(a\cdot\bar{c})-(\bar{c}\cdot\bar{d})\,(\bar{a}\cdot\bar{b})\}$ waarin $(\bar{b}\cdot\bar{d}) = 0$ zodat het rechterlid gelijk is aan $-\kappa(\bar{c}\cdot\bar{d})\,(\bar{a}\cdot\bar{b}) = -\kappa\cdot||c||\;||a||\;||b||\cos\beta\cdot\cos\alpha$.

Het linkerlid:

$\bar{b}\times\bar{c}$ $\bar{d}$ $\bar{a}$ $\bar{d}\times\bar{a}$ $\bar{b}$ $\bar{c}$

$\bar{d}\cdot\{\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})\}$ gaan we weer herleiden.
$\bar{d}\cdot\{\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})\} = (\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{d}\times\bar{a} = \bar{d}\times\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) =$
$=\bar{c}\cdot(\bar{d}\times\bar{a})\times\bar{b} = -\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{d})\times\bar{b}$.

Nu is $||\bar{a}\times\bar{d}|| = ||\bar{a}||$, $||(\bar{a}\times\bar{d})\times\bar{b}|| = ||\bar{a}||\;||\bar{b}||\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
$= ||\bar{a}||\;||\bar{b}||\cos\alpha$.
en tenslotte het linkerlid zelf:
$-||\bar{a}||\;||\bar{b}||\;||\bar{c}||\cos\alpha\cdot\cos\beta$.

Vergelijken we beide leden, dan volgt $\underline{\kappa = 1}$.
zodat:

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b}).$$

Opmerking:

Men kan ook direct λ en μ bepalen, door beide leden 'dot' te vermenigvuldigen met $\bar{a}\times\bar{b}$ respectievelijk $\bar{a}\times\bar{c}$.
Bovenstaand bewijs is echter overzichtelijker.

Wiskunde op de basisschool (I)

1 Mogelijkheden voor wiskunde-onderwijs op de basisschool

In het begin van 1968 werd aan de C.M.L.W. een rapport aangeboden, waarin de stelling geponeerd werd, dat er argumenten van didaktische, matematische en maatschappelijke aard zijn, die pleiten voor een toenadering van rekenonderwijs tot wiskunde-onderwijs op de basisschool. Dit leidde tot de instelling van een subkommissie basisonderwijs van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, die de mogelijkheden zou onderzoeken om op lange termijn nieuw wiskunde-onderwijs op de basisschool te introduceren als fundament voor een vernieuwd wiskunde-onderwijs voor 5- tot 18-jarigen, dat matematisch belangrijk is, maatschappelijk relevant en aanleiding zou kunnen geven tot didaktische verlevendiging.

De mogelijkheden tot een verlevendiging van de didaktiek zijn ten dele af te leiden uit de struktuur van de 'moderne' leerstof: de moderne schoolwiskunde is abstrakter dan de oude. Hieruit volgt dat er van een wiskundestruktuur meerdere modellen in de 'werkelijkheid' te vinden zijn, die onderling een grote mate van niveau-verschil kunnen vertonen. Deze abstraktie-hierarchie geeft dan ook aanleiding om wiskunde te bedrijven in het wijde gebied tussen enerzijds het hanteren van materialen volgens bepaalde regels en anderzijds het manipuleren van betekenisloze tekens op papier.

Vandaar dat het basisonderwijs, het voortgezet beroepsonderwijs en het algemeen voortgezette onderwijs een plaats zouden kunnen vinden in dit ruime veld, vandaar ook dat de didaktiek ruime mogelijkheden ziet voor gevarieerde werkvormen binnen verschillende modellen en vooral ook mogelijkheden voor differentiatie en vertikale leerstofplanning.

2 Gevaren

De analyse van mogelijkheden tot didaktische verlevendiging vanuit de vakstruktuur geeft tevens inzicht in de gevaren, die in een dergelijke introduktie verscholen liggen:

1e Als de moderne schoolwiskunde op dezelfde manier onderwezen wordt als veelal het rekenonderwijs nu, dan zullen de 'resultaten' slechter zijn dan met de oude leerstof (i.c. het traditionele rekenen). Kortom, met de leerstofverandering zal een aanbiedingsverandering moeten plaatsvinden, willen we geen brokken maken.

2e Het gevaar van modern wiskunde-onderwijs op een laag abstraktieniveau bestaat vooral ook in een dubbelzinnige interpretatie van de zinvolheid: konkrete handelingen krijgen soms pas matematische betekenis vanuit een hoger standpunt, waardoor de betekenis voor het kind op dat moment niet overeenkomt met de zin, die de leraar er a.h.w. van bovenaf inlegt. Vanuit deze problematiek is het zinvol om te vragen naar bijv. de betekenis van bezigheden om de groepsstruktuur te ontdekken; de betekenis voor het kind dan wel te verstaan.

Met het stellen van de noodzaak van didaktische verlevendiging komt dan tevens heroriëntering in het gezichtsveld; een heroriëntering die de tweeeenheid wiskunde-onderwijs tot onderwerp zou moeten hebben.
Om echter deze heroriëntering van de onderwijzer te realiseren zou er een tweeledig 'kader' gevormd moeten worden. Laten we nu eerst nader omschrijven wat we met deze 'kadervorming' (tussen aanhalingstekens!) bedoelen.

3 'Kadervorming'

We komen tot de hoofdstelling van Wiskobas:

'Kadervorming' is het scharnierpunt van de beoogde vernieuwing

De doelstelling van Wiskobas bestaat allereerst in het ontwikkelen van een onderwijsleerplan als kader, waarbinnen zich een meer homogene vernieuwing van het wiskunde-onderwijs op de basisschool zal kunnen voltrekken.
Naast deze leerplanontwikkeling als kader, waarbìnnen zich de voortgang kan voltrekken, zal een kader van deskundigen gevormd dienen te worden, waardòòr de vernieuwing zich kan voltrekken.
In de stelling komt dus tot uitdrukking, dat de ontwikkeling van een plankader èn de vorming van een mankader de hoofdtaak van Wiskobas is. Om de verwarring niet te vergroten zullen we voortaan dit tweeledige doel aanduiden met de termen 'leerplanontwikkeling' en 'kadervorming'. Zowel de leerplanontwikkeling als de kadervorming zal volgens fasen dienen te verlopen, resp. van algemeen naar gespecificeerd en van centraal naar regionaal.
Een eerste planning van deze fasering, die noodzakelijk was om de kontinuiteit in materiële en personele voorzieningen te waarborgen en tevens om de

verschillende participanten een zicht te geven op lange termijn, werd neergelegd in een Tienjarenplan, dat in september 1968 werd aangeboden aan de inspekteur-generaal van het onderwijs. Als uitvloeisel van de grondgedachten werden regionale werkgroepen geïnstalleerd, die volgens het olie-vlek principe de verspreiding zouden realiseren. Leraren wiskunde en pedagogiek van de Pedagogische Akademie, vertegenwoordigers van plaatselijke schooladviesdiensten en onderwijs-onderzoekers werkten samen om de eerste fase van de planning, die betrekking had op studenten van de P.A. en onderwijzers, te vullen. Ondanks de gebrekkige organisatiestruktuur en een onderbezetting van het personeelsbestand groeide Wiskobas heel snel van een projekt tot een beweging, die wilde doorstoten naar een algehele vernieuwing van het rekenonderwijs en daarbij . . . vastliep.

4 Wiskobasta

Daarmee kreeg de Wiskobas-slogan 1970: 'H.O. geen risico' (Lees: heroriënteer, neem geen risiko!) een boemerangeffekt en werd het hele projekt stopgezet.
De oorzaak van deze – tijdelijke – stopzetting (Wiskobasta) lag enerzijds in het ontbreken van voldoende materiële middelen. Anderzijds bleek er een versnelling op te treden door het vertalen (bewerken) van buitenlandse wiskunde-metoden voor de basisschool.
Daardoor werd de noodzaak om volgens de planning te werken des te urgenter, want wegens het ontbreken van homogeniteit van de inhoud van het modern wiskunde-onderwijs was het kader van het onderwijsleerplan meer dan ooit noodzakelijk. T.a.v. de 'oude' leerplannen bestond immers een historisch gegroeide konsensus, t.a.v. de 'nieuwe' leerplannen zou deze overeenstemming er slechts kunnen zijn binnen het kader van een nationaal geldend onderwijsleerplan, waarin naast een gedetailleerde leerstofplanning verschillende mogelijkheden voor leerstofordening en effektmeting gegeven zouden worden. Binnen de omheining van zo'n onderwijs-werkplan zou er een verantwoorde speelruimte zijn voor verschillende 'metoden'.

Een en ander zou echter tijd kosten!

Om uit de impasse te geraken werd het projekt stopgezet om gelegenheid te krijgen betere voorwaarden van materiële en personele aard op te bouwen. Tevens werd de paradoksaal klinkende tekst uitgesproken:

Wiskobas wil niet zonder MEER wiskunde op de basisschool.

Dit 'meer' bestaat dan uit 'kadervorming' in de breedste zin van het woord. (In volgende artikelen zullen we hierop verder ingaan.)

5 Bewustwording van de problematiek.

Met medewerking van Wiskobasleden, inspekteurs e.a. bleek een grotere bewustwording van de problematiek t.a.v. het introduceren van wiskunde-onderwijs op de basisschool te realiseren. We noemen enkele aspekten van de problematiek:

1 In Nederland worden er vanaf uitgeverszijde moderne wiskunde-metoden geïntroduceerd, die gestoeld zijn op modern matematische principes. Drie dingen komen daarmee scherper in het licht te staan:

. Bij een verdere verspreiding van een dergelijke 'metode' zou de noodzakelijke heroriëntering en (bege-)leiding de taak en kapaciteit van de uitgevers ongetwijfeld overschrijden, om van een onderzoek maar te zwijgen.

. Het bewerken van buitenlandse metoden kan leiden tot een vergaande heterogeniteit in het basisonderwijs.

. Papieren begeleiding is onvoldoende voor een didaktische vernieuwing.

2 Buitenlandse ervaringen leren ons:

. Het gevaar van een sterke polarisering in de diskussie, waarbij voor- en tegenstanders van modern wiskunde-onderwijs elkaar wederzijds bestoken (over de hoofden van de kinderen heen) met uitdrukkingen als: moderne wiskunde ontverbaliseert, ontaritmetiseert en ontpedagogiseert. (U merkt aan de terminologie, dat we hier doelen op West-Duitsland).
Karakteristiek voor deze diskussie is de eenzijdigheid, waarmee men wederzijds zowel het traditionele rekenonderwijs als het wiskunde-onderwijs benadert. Beperken we ons tot het moderne wiskunde-onderwijs, dan valt juist de pluriformiteit op. Waarmee gezegd wil zijn, dat een algemene diskussie over de wenselijkheid van modern wiskunde-onderwijs op de basisschool zinloos is als geen nadere specifikatie van het matematische belang van de leerstof, de maatschappelijke relevantie en de didaktische verlevendiging plaats vindt. (We komen ook hierop nog terug.)

. De noodzaak van heroriëntering en begeleiding.
Ervaringen uit de V.S., waar het grote aantal onderwijzers een te grote handicap blijkt te zijn voor een algemene doorvoering van de heroriëntering leren ons, dat de weerstanden bij de onderwijzers toenemen: men heeft geen indruk van de plaats die de leerstof inneemt in het geheel van de leerstofopbouw en beoordeelt het nieuwe wiskunde-onderwijs als kwalitatief inferieur aan het traditionele.
Het werk in het wiskunde-werklokaal (werkhoek) komt niet van de grond. Bij de onderwijzers, die meewerken aan het Nuffield Projekt konstateren we iets anders: de didaktische verlevendiging blijkt niet gebaseerd op voldoende matematische kennis.
Hiermee blijkt o.i. dat er grote inspanningen geleverd moeten worden om de twee-eenheid: wiskunde-onderwijs te bewaren.

. Het gevaar van een vroegtijdige verspreiding van onrijpe onderwijs-

vruchten is duidelijk zichtbaar in Zweden, waar overigens de leerplanontwikkeling in een gedegen onderwijsstruktuur is geplaatst.
Kortom, er is grote inspanning nodig om een goede ontwikkeling te waarborgen of anders gezegd: er is veel energie nodig om een vroegtijdige verspreiding van moderne wiskunde op de basisschool te voorkomen.

6 Verleden, heden en toekomst

Laten we de opsomming, die nog met vele voorbeelden voortgezet zou kunnen worden, afbreken en vanuit het verleden, via het heden een blik in de toekomst wagen.

1 In z'n uitgangspunt streefde Wiskobas naar een twee-eenheid: modernisering van het wiskunde-onderwijs

2 In z'n planning streefde Wiskobas naar een drie-eenheid: opleiding-heroriëntering/begeleiding-(leerplan-)ontwikkeling

3 In z'n uitvoering streefde Wiskobas naar een veel-eenheid: geïntegreerde participatie van alle betrokkenen, onder behoud van eigen signatuur

4 Als organisatie werd Wiskobas in 1970 een géénheid: Wiskobasta

5 Als instituut in 1971 zal Wiskobas d.m.v. samenwerking de wederopbouw ter hand nemen, daarbij wederom stellend:

Wiskobas wil niet zonder MEER wiskunde-onderwijs op de basisschool

De C.M.L.W. wil dit 'meer' dan ondersteunen door de instelling van een samenwerkingskommissie, waarin belanghebbende en belangstellende instanties vertegenwoordigd zijn en samenwerken aan leerplanontwikkeling en kadervorming.

Vanaf oktober zal ook een beperkt aantal onderwijzers in de gelegenheid gesteld worden om in deze leerplanontwikkeling te participeren. De zgn. heroriënteringskursussen zullen echter in dienst van de leerplanontwikkeling staan en *niet* dienen ter begeleiding van 'n moderne wiskunde-metode.

7 Planning

Voor het kursusjaar 1970–1971 zijn de volgende werkzaamheden gepland:
– Organisatorische opbouw
. Wiskobaswerkgroepen
. Ontwerpschool
. Samenwerkingsverband participanten

- Kadervorming d.m.v. deskundigen
  . i.v.m. publikatie I Leerplan
  . i.v.m. strategie van de verfijning

- Voorlichting algemeen
  . in onderwijsbladen
  . in vakbladen
  . via t.v., e.d.

De begintoestand in september 1971 zal dan zijn:
. Tijdschrift aflevering I klaar
. Eerste publikatie Leerplan (Onderzoeksplan) klaar
. H.O.O.-I kan starten in kleine kring
(H.O.O.: heroriëntering onderwijzers)
. P.A.-I kan starten; 4 gerevideerde blokken klaar
(P.A.: Pedagogische Akademie)
. Wiskobaswerkgroepen opgericht
. Samenwerking in eerste instantie geregeld
. Voorbereiding konferenties P.A., Inspekteurs klaar

Het schooljaar 1971–1972 zal dus in het teken staan van:
- Kadervorming
- Start heroriëntering
- Vervolg leerplanontwikkeling

8 Besluit

We hopen U enigszins bevredigend te hebben geïnformeerd. In een volgend artikel zullen we wat dieper op enige inhoudelijke aspekten ingaan.

Rest ons te vermelden, dat de leraren v.o., die belangstelling hebben om mee te werken binnenkort in de gelegenheid gesteld worden om zitting te nemen in de werkgroepen van Wiskobas.

Utrecht, 1 maart 1971

F. Goffree,
A. Treffers,
E. Wijdeveld.

Korrel CLXXI

Moderne wiskunde?

In het algemeen onderwijsblad 'Resonans' (W/N), 3e jg. no. 1 (nov. 1970) komt een foto voor, die mij een schok gaf. Men ziet daar op blz. 7 een stukje van een klas met schoolbord en leraar. Op dat bord de grafiek van twee functies: f_1 (zo te zien kwadratisch) en f_2 (lineair). De abscissen van de snijpunten van de grafieken zijn a en b. Onder de figuur staat te lezen

$f_2 > f_1$ als $a < x < b$.

Een ouderwetse leraar zou geschreven hebben $f_2(x) > f_1(x), \ldots$ enz. De modern-doende leraar heeft iets opgevangen van de aanduiding van een functie door het functiesymbool f. Realiseert hij zich wat hij opschrijft?

$f_2 > f_1$ betekent: f_2 en f_1 zijn elementen van eenzelfde verzameling; de verzameling is geordend; men kan uitmaken welke van de twee de grootste is. Die verzameling zou dan een verzameling van functies moeten zijn. Of men nu een functie definiëert als een afbeelding, dan wel als een verzameling van geordende getallenparen, maakt weinig uit: in de verzameling van de 'school'-functies is geen ordening gedefiniëerd, dus $f_2 > f_1$ is onzin.
Nu moet men niet tegenwerpen: wat de leraar bedoelt en wat de leerling er van begrijpt is toch wel duidelijk; wat maakt het nu uit om gemakshalve $f_2 > f_1$ te schrijven als men $f_2(x) > f_1(x)$ bedoelt?

Ik meen dat een van de belangrijkste elementen van de modernisering van het wiskundeonderwijs juist ligt in het precies opschrijven van wat men bedoelt. Alleen dan is de leerling genoodzaakt zich telkens te realiseren wat hij schrijft, en hij kan het niet goed opschrijven als hij niet de juiste gedachtengang heeft gevolgd. Ook heeft men er controle op of het gegeven antwoord inderdaad een antwoord is op de gestelde vraag.
Laten we trachten de bijbehorende opgave te formuleren, zonder de symbolen $f_i(x)$ te gebruiken (als deze symbolen nl. reeds in de opgave voorkwamen is een beantwoording met $f_2 > f_1, \ldots$ niet acceptabel).

Opgave: Van twee functies f_1 en f_2 is f_1 kwadratisch en f_2 lineair. Voor welke waarden uit hun gemeenschappelijk definitiegebied is de bijbehorende functiewaarde voor f_2 groter dan die voor f_1?
Men kan de opgave niet goed formuleren zonder naar functiewaarden te vragen. Welnu dan!
Ik kom tot het tweede deel van de beantwoording op voornoemd bord:

'als $a < x < b$'.

M.i. kan dit evenmin door de beugel, zeker niet bij gemoderniseerd onderwijs.

De volgende zin is immers óók juist:

$$f_2(x) > f_1(x) \text{ als } \tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b < x \leqq \tfrac{1}{3}a+\tfrac{2}{3}b.$$

Het woordje 'als' geeft een voldoende voorwaarde aan, niet een noodzakelijke. Er zou moeten staan:

$$f_2(x) > f_1(x) \text{ uitsluitend als } a < x < b, \text{ of bijv.:}$$
$$f_2(x) > f_1(x) \Leftrightarrow a < x < b.$$

Maar waarom niet gebruik gemaakt van de verzamelingen-notatie? In de laagste klassen worden de leerlingen heel lang zoet gehouden met verzamelingen. Een soort modeverschijnsel? Men zou het wel zeggen als men ziet hoe weinig toepassing ze vinden in de hogere klassen. Neem het vraagstuk dat ons in dit artikeltje bezighoudt. Daarin gaat het duidelijk over twee verzamelingen die gelijk zijn. Laat dit dan ook in de beantwoording tot uiting komen:

$$\{x|f_2(x) > f_1(x)\} = \{x|a < x < b\}; \text{ of: } = (a, b).$$

Als de leerling dit opschrijft, dan kan het haast niet anders, of hij heeft de juiste gedachtengang gevolgd en heeft de zaak begrepen.
Is een leerling tot zodanige beantwoording niet te krijgen, dan dient hij verder van de wiskunde af te zien.

H. Streefkerk
Putten.

Naschrift bij de correctie

Schriftelijk examen wiskunde-m.o.-A 1970, opgave Analyse, no. 3.

Bewijs dat de functie sin x *voor alle reële waarden van* x *behalve 0 en* π *groter is dan de functie* $\dfrac{x(\pi-x)}{\pi}$.

Als u mij toestaat: hoogst betreurenswaardig, als u begrijpt wat ik bedoel.

Boekbespreking

H. Behnke e.a., *Le passage du Secondaire à l'Université et les Etudes Mathématiques*, 138 blz., ingen. 110 belg. fr.; te bestellen door middel van giro-overschrijving op COP 345–40, Luxembourg, Séminaire C.I.E.M. 1969, Echternach.

In de lange rij van plaatsen waar de C.I.E.M. sinds 1959 regionale conferenties heeft georganisserd, verschijnt thans de naam Echternach voor de tweede maal. In 1965 was het thema *Les repercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement*, thans gaat het over de problematiek ten aanzien van de overgang middelbare school-universiteit.

In het organisatiecomité had ook ditmaal prof. dr. Behnke zitting, die als eerste voorzitter van de in 1952 herboren C.I.E.M. ook in ons land bekendheid heeft verworven.

Behnkes voordracht was gewijd aan *La crise de l'enseignement mathématique* en bevat een boeiend overzicht over de ontwikkeling van de wiskunde in de laatste honderd jaar, waarin Behnke de betekenis van vele wiskundigen van naam voor de wiskunde van vandaag schetste en naging welke disciplines vaste plaats gekregen hebben in ons voortgezet onderwijs. Naast de kloof tussen school en universiteit wijst hij op de kloof tussen school en huis. Ouders begrijpen vaak niet dat hun kinderen wiskundezaken hebben te leren die zij nooit gehad hebben en die ook zij niet begrijpen. Hij schetst de op gang zijnde modernisering van het onderwijs uitlopende op een bourbakinisering waarvan Papy de enthousiaste apostel is.

Onder de 14 andere sprekers ter conferentie ontmoeten we bekende namen: Revuz (Parijs), Frenkel (Straatsburg), Pickert (Giessen), Servais (Morlanwelz), Delessert (Lausanne), Van der Blij (Utrecht). Jammer dat in de bundel de voordracht van Papy, die getiteld was *Connaissance souhaitée de la mathématique à l'entrée à l'Université*, ontbrak.

Voor alle Nederlandse wiskundeleraren bevat de bundel waardevolle informatie die speciaal hen die bij het v.w.o. betrokken zijn rechtstreeks zal interesseren.

Joh. H. Wansink

Dr. M. G. Kuipers e.a., *Gemoderniseerde meetkunde op basis van afbeeldingen*, deel 3H. Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1970, 99 blz., *f* 6,75.

Dit boek is voor de havo bewerkt door C. J. Klesser en C. Rijnders en behandelt de gelijkvormigheidsafbeelding, de cirkelfuncties, gonio- en trigonometrie en vectoren. Op blz. 42 lees ik dat π 'alleen bij benadering kon worden bepaald'. Wat bedoelen de auteurs hiermee? Is het kon nu kan? Is gedacht aan een rationale benadering? Een regel verder staat dat in de vorige eeuw is aangetoond dat π een irrationaal getal is, maar dit bewees men reeds omstreeks 1750. In de vorige eeuw werd bewezen dat π transcendent is.

Op blz. 65 was het wel handiger geweest de letters in fig. 61b in overeenstemming te brengen met die van fig. 61a. Het bewijs kan dan ineens gegeven worden.

Dat de sinusregel een betrekking is tussen de elementen van de driehoek, is onjuist. Het zijn *twee* relaties, althans twee onderling onafhankelijke. Zou het niet verstandig zijn eerst vast te stellen dat dit aantal onderling onafhankelijke relaties drie bedraagt? Nu vinden we twee sinusrelaties, drie cosinusregels, hoeveel nog?

Tenslotte zou men (blz. 83) 'beter over de norm dan over de lengte van een vector kunnen spreken'. Dit is natuurlijk onzin. Een norm is een generalisatie van het begrip lengte.

De uitvoering is goed verzorgd.

Burgers

Papy, *Moderne wiskunde* 5, Marcel Didier, Brussel en Meulenhoff-Didier, Amsterdam, 1970, XVI+286 blz.

In dit boek worden achtereenvolgens behandeld: combinatieleer, de rekenkunde van de gehele getallen, de rekenkunde van de rationale getallen, commutatieve ringen en velden, rekenkundige eigenschappen van groepen en galois-velden. Voor een bespreking van de inhoud zou ik willen verwijzen naar Euclides 42 (1966–67) VI, p. 161–166.
Het boek is in het Nederlands vertaald door Jef Nijs en Paul Kalmijn, beiden leraar aan de Europese School te Brussel. Van deze twee is Kalmijn Nederlander. Dat een Belgisch boek uit het Frans in het Nederlands vertaald wordt mede door een Nederlander is bij mijn weten een novum. Ik heb dan ook met aandacht de Nederlandse tekst vergeleken met de Franse en heb gemerkt, dat het aantal gallicismen in de vertaling zeer gering is. Dat ze voorkomen is welhaast onvermijdelijk.
Om duidelijk te maken, dat ik niet slechts vriendelijke woorden spreek, maar het boek werkelijk bekeken heb, laat ik hier enkele m.i. minder juiste vertalingen volgen. Na in het begin niets gevonden te hebben, vond ik:
op blz. 65 'prouvons' vertaald door 'laten we bewijzen' (i.p.v. we bewijzen);
op blz. 90, 124, 178 e.a. werd 'loi interne' vertaald door 'inwendige wet', terwijl $+$, $\cdot$, $\cup$, $\cap$, $|$ beter inwendige operaties genoemd kunnen worden;
op blz. 111 staat: 'een natuurlijk getal niet nul' (un naturel non nul);
op blz. 131: 'het is erg makkelijk geordenden (Fr. ordonnés) te construeren', i.p.v. geordende verzamelingen;
op blz. 187 staat: 'een meermaals voorkomende berekening bewijst de volgende rekenregels' (un calcul routinier établit les règles de calcul que voici);
Dit zijn echter slechts kleine oneffenheden in een overigens beslist goede vertaling.
Op veler verzoek is het eerste hoofdstuk van het boek, vanwege zijn voortreffelijke kwaliteiten, afzonderlijk in boekvorm in de handel gebracht. Het is getiteld:
Papy, *Combinatieleer*, 48 blz.
Ik ontleen er een probleem aan, dat u in de recreatierubriek van dit nummer vindt, betreffende het verdelen van guldens over spaarpotten.

P. G. J. Vredenduin

Weten en geweten van de Wetenschap, verslag van het achttiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetsnchappen gehouden te Utrecht op 3 april 1970, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1970, 54 blz., *f* 4,50.

Dit verslag bevat de teksten van de voordrachten van:
Prof. dr. P. Korringa, Ervaringen van een visserijbioloog.
Dr. D. van Dalen, In dienst van Hare Majesteit Mathematica.
Prof. dr. J. M. W. Milatz, De natuurwetenschappen in dienst van goede of verkeerde meesters?
Dr. N. J. A. Groen, Milieuhygiëne.
Prof. dr. A. G. M. van Melsen, Weten en geweten.
Het is te hopen dat de dalende belangstelling voor deze congressen (1964: 130, 1966: 175, 1968: 190 en 1970: 85 deelnemers) niet het gevolg zal hebben, dat voortzetting onmogelijk wordt.

Burgers

S. Dworatschek, *Schaltalgebra und digitale Grundschaltungen*, W. de Gruyter en Co., Berlijn 1970, 126 blz., DM 12.–.

De digitale schakelingstechniek vindt steeds meer toepassing. Hoewel het boekje speciaal bedoeld is voor technici, zal het wel belangstelling wekken in ruimere kring. De opzet is zo

gekozen, dat het door zelfstudie kan worden doorgenomen. Bijzondere wiskundige kennis is niet nodig.
Een korte inleiding in de boole-algebra is noodzakelijk. De basisfuncties zijn de identiteit, de negatie, de èn-functie en de òf-functie. Voor de laatste twee worden dan schakelingen besproken. De schrijver behandelt dan zes methoden om de gecombineerde functies te beschrijven (11 blz.) In het tweede deel worden dan de basisschakelingen van de digitale techniek, diode-, triode- en transistorschakelingen besproken.
Alle opgaven die de tekst vergezellen vindt men verspreid opgelost. (Het antwoord op no. 34 moet zijn *b* i.p.v. *c*).

Burgers

Prof. dr. Stellwag, Prof. dr. Vuyk en dr. ir. van de Griend, *De leraar en zijn klas*, 4e dr., *f* 11,20, Wolters-Noordhoff, Groningen.

Dit, nogal bekende werk is beslist van veel belang voor de aanstaande, de jonge en de ervaren docent. Voor de aanstaande docent zullen veel mededelingen, ervaringsfeiten en wenken nuttig zijn, maar het lijkt me moeilijk dit naar waarde te schatten als men nog niet goed ondervonden heeft wat het onderwijs is. Voor de jonge docent is het boek het meest waardevol. Als hij aan de hand van zijn eigen ervaringen de diverse problemen doorleest zal met dikwijls voor hem een aanleiding zijn gemaakte fouten te herstellen. De ervaren docent zal het veel interesse, maar ook met de nodige kritiek, het goed geschreven boek doorwerken.

B. Groeneveld

Dr. L. N. H. Bunt, drs. H. G. B. Broekman, *Algebra, een geprogrammeerde cursus*, deel F, Wolters-Noordhoff, N.V., Groningen, 1970, 106 blz., inclusief antwoorden, ingen. *f* 11,—.

Het is uiteraard ondoenlijk een geprogrammeerde cursus op zijn bruikbaarheid te beoordelen van achter de schrijftafel. Men zal de methode moeten invoeren en de resultaten afwachten. Dat neemt niet weg, dat men al lezend, toch een indruk krijgt van de geleidelijkheid waarmee de theorie wordt opgebouwd en het geleerde wordt getest. En die indruk is niet ongunstig uitgevallen.
Behandeld worden de rijen (op blz. 15 lees ik driemaal, het zijn dus geen drukfouten, dat een m.r. een *rede* i.p.v. een *reden* bezit). Het is ook niet fraai, dat de beide definities van een m.r. elkaar niet dekken. De rijen 1, 0, 0, . . . en 0, 0, . . . zijn wel m.r. volgens de eerste, maar niet volgens de tweede definitie. En dan kan volgens de eerste definitie een rij uit twee, een of zelfs géén enkele term bestaan.
Wie weet krijgen we nog eens een volledige behandeling van functies waarvan het definitiegebied leeg is.
Op blz. 23 mis ik een algemeen criterium voor een gemiddelde. Is $f(a_1, \ldots, a_n)$ een gemiddelde van $a_1 \ldots a_n$ dan zal $f(a_1, a_1, \ldots, a_1) = a_1$ en $f(\text{perm. } a_i) = f(a_1, \ldots, a_n)$.
Vervolgens komen de exponentiële functie, (waarom wordt nu weer een nieuw symbool ingevoerd? $\Lambda_n \in N$ i.p.v. $\forall_n \in N$) het samenstellen van functies, inverse, logaritmische functies, algemene structuren, de twee groepen van de orde 4 (aan de hand van voorbeelden), niet abelse groepen en lichamen.
De uitvoering is goed verzorgd, het formaat bevalt me niet.

Burgers

Ontvangen (o.a. herdrukken)

Rekenliniaal, no JE 650 *met handleiding,* Wolters-Noordhoff NV, Groningen, f 11,25.

In de handleiding vindt men voor het gebruik van de verschillende scholen enkele uitgewerkte voorbeelden.

Projectiegids 1970–1971, Panfilm NV.

Deze gids bevat een overzicht van in ons land voor vertoning in besloten kring bestemde 16 mm films, dia's en beeldstroken. Onder het hoofd wiskunde komen drie filmnummers voor. Wat deze en of deze iets met wiskunde te maken hebben is uit de tekst niet op te maken.

Drs. Chr. Boermeester e.a., *Van A tot Z, werkboek der wiskunde voor mavo,* 1*a*, 3e dr.; M4H-2b, 3e en 4e dr., J. Muusses NV, Purmerend, 1970, 138 blz., f 6,90 resp. 160 blz. f 7,75.

Rekenliniaal FJ no 1200, Wolters-Noordhoff NV, Groningen, f 16,20.

In vergelijking met JE 650 vindt men als extra schalen (LL_1, LL_2, LL_3) de e-machten van de getallen op de D-schaal.
Ook hier is een gebruiksaanwijzing met uitgewerkte voorbeelden voor alle schalen toegevoegd.

Dr. P. M. van Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring, *Van A tot Z*, werkboek der wiskunde voor de brugklas voor havo-vwo, 1c, 2e dr., J. Muusses NV, Purmerend, 1969, 157 blz., f 6,15.

Dr. A. van Dop, dr. ir. B. Groeneveld en dr. A. van Haselen, *Afbeeldingsmeetkunde*, deel I. VH. 4e druk, deel II 2e druk, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1969, f 6,25 resp. f 6,50.

Dr. A. van Dop, dr. ir. B. Groeneveld, dr. A. van Haselen en drs. L. W. van der Horst, *Moderne algebra voor VWO en HAVO,* deel I voor de brugklas, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1969, 2e druk, f 6,—.

M. E. Kok en J. H. Slump, *Algebra voor de bovenbouw HAVO.* Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, 1969, 2e druk, f 7,10.

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

The Mathematics Teacher, LXII^7–LXIII^5, december 1969–mei 1970.

D. W. Stover, Pretesting for the college boards;
N. L. Noddings, Providing for individual rates of learning in mathematics;
R. W. Prielipp, The area of a pythagorean triangle and the number six;
H. D. Wilsted and P. J. Bryant, Summer employment of mathematics teachers in industry;
M. Wiscamb, Graphing true-false statements;
F. L. Wren, The 'new mathematics' in historial perspective;
H. F. Fehr, Program of mathematics for the first year of study in the junior high school (seventh schoolyear) in Belgium;
Ch. J. Zoet, Computers in mathematics education;
S. Weiss, What mathematics shall we teach to the low achiever?

E. F. Krause, Homomorphism, a unifying concept;
D. M. Shafer, A proposal for the mathematics methods course;
B. L. Baker, Developing a meaningful algorithm for factoring quadratic trinomials;
J. M. Jeffery, Psychological set in relation to the construction of mathematical tests;
W. E. Buker, Modern mathematics or traditional mathematics;
W. Koetke, Computer-oriented mathematics;
E. D. Nichols, Experimental programs;
R. H. Rolwing e.a., The parallel postulate;
P. Lefebvre, Mathematical structures and the role of algebra in school mathematics.

H. T. and A. H. Freitag, The magic of a square;
M. A. Farrell, Area from a triangular point of view;
B. Rasof, Continued fractions and 'leap' years;
A. L. Buchman, Patterns in algorithms for determining whether large numbers are prime;
N. H. Borota and Gl. M. Veith, Mathematics for the learning laboratory;
L. S. Grinstein, A note on the greatest integer function;
H. F. Fehr, Some remarks on Japanese mathematics education.

H. von Baravalle, Conic sections in relation to physics and astronomy;
H. E. Vaughan, The expression '0^0';
G. F. Edmonds, An intuitive approach to square numbers;
J. Garfunkel, The recursion formula;
D. W. te Selle, Pi, polygons and a computer;
W. S. Dorn, Computer-extended instruction;
M. Glaymann, Arithmetic in the fifth class.

Fr. Mosteller, Report American Statistical Association;
E. R. Ranucci, On skewed regular polygons;
D. Rappoport, Definition-consensus or confusion?
W. G. Brady, Complex roots of a quadratic equation graphically;
E. G. McClain, Pythagorean paperfolding;
M. Wiscomb, '*b*-ary' fractions;
M. C. Allen, Two incorrect solutions explored correctly;
R. R. Poole, An old stumbling stone revisited.

E. K. Genkins, A case of flexibility in classroom instruction;
J. R. Smart, Theorems for finite sets of primes;
D. E. Jennings, An intuitive approach to pierced polygons;
J. D. Allen, A noncombinatorial proof of the number of all subsets of a finite set;
S. D. Schery, Topics in numerical analysis;
M. A. Shouk, Mathematics education in the Arab States.

W. E. Ferguson, The junior high school mathematics program – past, present, and future;
W. J. Young, The bouncing ball *does* come to rest;
J. Mandelbaum and A. Schild, An interesting relationship among the roots of a cubic equation;
Ch. W. Trigg, A card trick;
M. A. Rogers, The rationale of slide rule manipulation;
M. Wiscamb, A geometric introduction to mathematical education.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

258 Op hoeveel manieren kan men 88 guldens over vier spaarpotten verdelen
a. als er spaarpotten leeg mogen blijven,
b. als geen enkele spaarpot leeg mag blijven?
De spaarpotten hebben 'verschillende kleur', d.w.z. een verdeling 10, 20, 43, 15 wordt verschillend geacht van b.v. 20, 10, 15, 43.

259 Op hoeveel manieren kan men 88 guldens verdelen over vier spaarpotten, als er spaarpotten leeg mogen blijven en de spaarpotten wel 'dezelfde kleur' hebben? Nu wordt dus b.v. 10, 20, 43, 15 niet verschillend geacht van 20, 10, 15, 43.

Oplossingen

256 Bij een spel wordt alleen met hele guldens gespeeld. Iemand wint $\frac{1}{5}$ deel van zijn bezit minus 135 gulden. Dit gebeurt vier keer achter elkaar. Elke keer wint hij iets. Met welk bedrag eindigt hij minstens?
Zou hij beginnen met $5 \cdot 135 = 675$ gulden, dan zou zijn bezit telkens gelijk blijven. Hij begint dus met een groter bedrag, dus met $675+x$ gulden ($x > 0$). Het getal x moet 4 keer achter elkaar door 5 deelbaar zijn en is dus minstens gelijk aan 625. Het beginbedrag is dus minstens $675+625 = 1300$ gulden. Hiervan uitgaande vindt men, dat het eindbedrag minstens 1971 gulden is, h.t.v.w. (hetgeen te verwachten was).
De heer Kootstra schrijft erbij, hoe hij de opgave geconstrueerd heeft. Hij ging uit van 1971 gulden. Nu rekent hij terug. Iedere keer wint hij b gulden minus $\frac{1}{a}$ deel van hetgeen hij dan bezit. Daarbij loopt zijn bezit gestadig terug. Begin nu met

$$\begin{array}{lll} & a^c+ab-b \text{ gulden} & \\ +b & \qquad\quad b & \\ & \overline{\qquad\qquad} & + \\ & a^c+ab & \\ :a & a^{c-1}+b & \\ & \overline{\qquad\qquad} & - \\ & (a-1)a^{c-1}+ab-b \text{ gulden.} & \end{array}$$

Voeren we deze operatie nogmaals uit, dan krijgen we

$$(a-1)^2a^{c-2}+ab-b \text{ gulden.}$$

En daarna

$$(a-1)^3a^{c-3}+ab-b \text{ gulden.}$$

Na c keer

$$(a-1)^c+ab-b \text{ gulden.}$$

Nu kunnen we niet verder. Het bezit is elke keer teruggelopen, omdat $\frac{a-1}{a} < 1$.

Niet moeilijk is nu a, b en c zo te kiezen, dat $a^c+ab-b = 1971$.

257 27 deuren, die cyclisch gerangschikt waren, moesten op zodanige wijze elk groen, paars of bruin geschilderd worden, dat elke mogelijke opeenvolging van deze drie kleuren rondgaande precies éénmaal voorkomt.
Dit kan als volgt:

00012122 11120200 22201011 021

(de kleuren zijn door cijfers gerepresenteerd).

Gids voor A.V. Lesmateriaal

Deze uitgave bevat adressen van een groot aantal producenten en leveranciers van audio-visueel lesmateriaal, met een omschrijving van het produkt.
Deze produkten zijn overzichtelijk per onderwerp achter de daarbij behorende tabkaarten gerangschikt, waardoor de gebruiker snel en doelmatig alle gewenste gegevens kan vinden.
De ,Gids voor A.V. Lesmateriaal' is vooral afgestemd op de lespraktijk in het onderwijs maar kan ook van nut zijn bij bedrijfsopleidingen en in de bibliotheken.
Een uitvoerige folder van de uitgave is op aanvrage verkrijgbaar.
Bij intekening - à f 35,00 - ontvangt u de basisinhoud, de tabbladen en de ringband, terwijl u automatisch geabonneerd bent op de toezending van de aanvullingen, die afzonderlijk in rekening worden gebracht. Ook via de boekhandel verkrijgbaar.

Een uitgave van

Muusses/Wolters-Noordhoff



Besteladres:

Wolters-Noordhoff, Postbus 58, Groningen

Wiskunde en de Gouden Eeuw

Voor de 17e eeuw is op vele punten aan te wijzen hoe maatschappelijke drijfveren grote ontwikkelingen in de wiskunde stimuleerden en hoe omgekeerd deze evolutie van zeer groot belang was voor de economische ontplooiing van de samenleving.
Dit proces beschrijft *drs. H. Pleysier* in zijn openbare les:

Een beschouwing over de ontmoeting tussen wiskunde en maatschappij in de Gouden Eeuw.
f 2,90 ISBN 9001713106

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.



Wolters-Noordhoff



GEMEENTE 'S-GRAVENHAGE.

HOGERE ECONOMISCHE SCHOOL „J. VAN ZWIJNDREGT"
(SCHOOL VOOR H.E.A.O.)

Houtrustweg 2
'S-GRAVENHAGE
Telefoon 070-654898

Met ingang van 1 augustus 1971 worden wegens uitbreiding **docenten** gevraagd voor de navolgende vakken:

WISKUNDE	totaal ± 26 uur
STATISTIEK	
OPERATIONS RESEARCH	
INFORMATICA	

Er wordt gestreefd naar een zo groot mogelijk specialisatie in de te doceren vakken. In overleg met sollicitanten en de reeds aan de school verbonden docenten zal worden nagegaan welke vakspecialisaties mogelijk zijn. Aan sollicitanten wordt derhalve verzocht hun voorkeur voor een bepaald vak of bepaalde vakken in hun sollicitatiebrief te vermelden.

Inlichtingen worden verstrekt door de directeur.

Voor het verkrijgen van huisvesting wordt zo nodig medewerking verleend.

Sollicitaties onder nummer 71-9 met vermelding van personalia en bevoegdheden uiterlijk 14 dagen na het verschijnen van deze oproep aan Burgemeester en Wethouders te zenden.

Inhoud